Билет 1

Равенство матриц. Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера $m \times n$ называются *равными*, если $a_{ij} = b_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Обозначение: $A = B$.

Линейные операции. *Суммой* матриц $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ называется матрица $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, элементы которой определены равенством

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Обозначение: $C = A + B$.

Матрица $-A = (-a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ называется *противоположной* к матрице $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Теорема 2.1. *Операция сложения матриц обладает следующими свойствами: $\forall A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $O \in \mathbb{R}^{m\times n}$*

1) $A + B = B + A$ (сложение матриц коммутативно);

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (сложение матриц ассоциативно);

3) $A + O = O + A = A$;

4) $A + (-A) = -A + A = O$.

Доказательство. Эти свойства непосредственно вытекают из определения и доказываются по единой схеме. Докажем свойство 2. Матрицы $(A + B) + C$ и $A + (B + C)$ имеют одинаковый размер $m \times n$, при этом их элементы, расположенные в одинаковых позициях, равны, так как $\{(A+B)+C\}_{ij} = \{A+B\}_{ij} + \{C\}_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = \{A\}_{ij} + \{B + C\}_{ij} = \{A + (B + C)\}_{ij}$. ∎

Разностью матриц $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ называется матрица $X = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ такая, что $A = B + X$.

Обозначение: $X = A - B$. Очевидно, что для любых матриц $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ существует единственная разность $A - B$, при этом

$$A - B = A + (-B) = (a_{ij} - b_{ij}).$$

Произведением матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ на число $\alpha \in \mathbb{R}$ называется матрица $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, элементы которой определены равенством

$$c_{ij} = \alpha a_{ij}, \quad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Обозначение: $C = \alpha A$.

Теорема 2.2. *Операция умножения матрицы на число обладает следующими свойствами: $\forall A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$*

1) $1 \cdot A = A$;

2) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;

3) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ (умножение матрицы на число дистрибутивно относительно сложения матриц);

4) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ (умножение матрицы на число дистрибутивно относительно сложения чисел);

5) $-A = (-1)A$.

Все эти свойства непосредственно вытекают из определения и проверяются по той же схеме, что и свойство 2 из теоремы 2.1. ∎

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число позволяют однозначно определить матрицу

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_k A_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A_i,$$

называемую *линейной комбинацией матриц $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathbb{R}^{m\times n}$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$.*

Умножение матриц. *Произведением матриц* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times k}$ называется матрица $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times k}$, элементы которой определены равенством

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}, \quad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,k}.$$

Обозначение: $C = AB$.

Уже из определения следует, что произведение матриц зависит от порядка сомножителей; произведение AB определено лишь в том случае, когда размеры матриц A и B согласованы специальным образом: *число столбцов левой матрицы должно совпадать с числом строк правой*. Это означает, что оба произведения AB и BA определены тогда и только тогда, когда A и B имеют размеры $m \times n$ и $n \times m$ соответственно. При этом размеры матриц AB и BA совпадают лишь при $m = n$. Следовательно, равенство $AB = BA$ возможно лишь для квадратных матриц одинакового порядка. Однако и в этом случае произведение матриц, вообще говоря, может зависеть от порядка сомножителей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы A и B, для которых $AB = BA$, называются *перестановочными* или *коммутирующими*. Очевидно, что на множестве $\mathbb{R}^{n\times n}$

1) нулевая и единичная матрицы перестановочны с любой другой матрицей;

2) любые две диагональные матрицы перестановочны.

Теорема 2.3. *Операция умножения матриц обладает следующими свойствами:*

1) $(AB)C = A(BC)$ *(свойство ассоциативности),*

2) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$, $\quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$,

3) $A(B+C) = AB+AC$, $(A+B)C = AC+BC$ *(свойство дистрибутивности),*

выполненными для любых матриц A, B, C, *для которых левые части равенств имеют смысл.*

Доказательство. Эти свойства проверяются непосредственно. Остановимся подробнее на свойстве 1. Так как произведение $(AB)C$ имеет смысл, то размеры матриц A, B и C согласованы соответствующим образом. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{k\times p}$. Тогда и произведение $A(BC)$ имеет смысл, при этом размеры обеих матриц $(AB)C$ и $A(BC)$ совпадают. Проверим совпадение элементов этих матриц, расположенных в одинаковых позициях. Обозначим $AB = U = (u_{ij})$, $BC = V = (v_{ij})$, $(AB)C = S = (s_{ij})$, $A(BC) = T = (t_{ij})$. Тогда для любых $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,p}$

$$s_{ij} = \sum_{q=1}^{k} u_{iq}c_{qj} = \sum_{q=1}^{k} \left(\sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rq}\right) c_{qj},$$

$$t_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}v_{rj} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} \left(\sum_{q=1}^{k} b_{rq}c_{qj}\right).$$

Числа c_{qj} в первой двойной сумме (a_{ir} – во второй) не зависят от индекса суммирования r (соответственно q), т.е. являются общими множителями слагаемых внутренней суммы. Следовательно, c_{qj} (соответственно a_{ir}) можно внести под знак суммирования, так что

$$s_{ij} = \sum_{q=1}^{k} \left(\sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rq}c_{qj}\right) = \sum_{q=1}^{k} \sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rq}c_{qj},$$

$$t_{ij} = \sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{k} a_{ir}b_{rq}c_{qj}\right) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{q=1}^{k} a_{ir}b_{rq}c_{qj}$$

Отсюда и из свойств двойной суммы следует, что $s_{ij} = t_{ij}$. ∎

Транспонирование матрицы. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Матрица $A^T = (a^t_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ называется *транспонированной* к матрице A, если

$$a^t_{ij} = a_{ji}, \quad i = \overline{1,n}, \ j = \overline{1,m}.$$

Для обозначения транспонированной матрицы используются также символы A^t и A'.

Переход от матрицы A к A^T называется *транспонированием матрицы* A. Заметим, что при транспонировании матрицы A ее строки становятся столбцами A^T с теми же номерами, а столбцы – строками. Другими словами, транспонирование – это вращение матрицы в пространстве на 180° вокруг главной диагонали.

Теорема 2.4. *Операция транспонирования матриц обладает следующими свойствами:*

1) $(A+B)^T = A^T + B^T$,

2) $(\alpha A)^T = \alpha A^T, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$,

3) $(AB)^T = B^T A^T$,

4) $(A^T)^T = A$,

выполненными для всех матриц A, B, для которых имеют смысл левые части равенств.

Доказательство. Проверим свойство 3, остальные непосредственно вытекают из определений. Положим $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times k}$, произведение AB при этом имеет смысл. Нетрудно проверить, что произведение $B^T A^T$ также имеет смысл, при этом размеры матриц $(AB)^T$ и $B^T A^T$ совпадают. Элементы этих матриц, расположенные в одинаковых позициях, равны, так как

$$\{(AB)^T\}_{ij} = \{AB\}_{ji} = \sum_{s=1}^{n} a_{js} b_{si} = \sum_{s=1}^{n} b^t_{is} a^t_{sj} = \{B^T A^T\}_{ij}. \blacksquare$$

Некоторые свойства операций. Приведем несколько полезных фактов, касающихся операций над матрицами. Доказательство этих свойств предоставляется читателю.

1. Операции сложения, умножения на число и умножения блочных матриц совершаются по тем же правилам, по которым они совершаются с обычными числовыми матрицами:

а) если блочные матрицы $A = (A_{ij})$, $B = (B_{ij})$ имеют одинаковый размер и одинаковым образом разбиты на клетки, то сумме матриц A и B при том же разбиении на клетки отвечает блочная матрица $C = (C_{ij})$ с элементами $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$;

б) произведению αA отвечает блочная матрица $C = (C_{ij})$ с элементами $C_{ij} = \alpha A_{ij}$;

в) если $A = (A_{ij})$ и $B = (B_{ij})$ – блочные матрицы, у которых число столбцов блока A_{is} равно числу строк блока B_{sj} при любых i, s, j, то произведению AB соответствует блочная матрица $C = (C_{ij})$ с элементами

$$C_{ij} = \sum_s A_{is} B_{sj}.$$

2. Вектор-столбец $e_i = (0\dots010\dots0)^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ и вектор-строку $e'_i = (0\dots010\dots0) \in \mathbb{R}^{1\times m}$ (у которых все компоненты равны 0, кроме i-й, равной 1) будем называть соответственно *i-м единичным столбцом* и *i-й единичной строкой*. Если $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, то в обозначениях (1.1)

$$Ae_i = a_i, \qquad e'_i A = a'_i. \tag{2.1}$$

3. Если $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, а $b' = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m)$ и $b = (\alpha_1 \alpha_2 \dots, \alpha_n)^T$ – вектор-строка и вектор-столбец соответственно, то

$$Ab = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i, \qquad b'A = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a'_i. \tag{2.2}$$

4. Если $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times k}$, то

$$AB = [\ Ab_1 \quad Ab_2 \quad \dots \quad Ab_k\ ], \qquad AB = \begin{bmatrix} a'_1 B \\ a'_2 B \\ \vdots \\ a'_m B \end{bmatrix}, \tag{2.3}$$

т.е. *столбцы произведения AB являются линейными комбинациями столбцов матрицы A, а строки произведения AB – линейными комбинациями строк матрицы B.*

Билет 2

Приведение матрицы к ступенчатой форме. *Элементарными преобразованиями матрицы* называются преобразования следующих типов:

1) перестановка двух строк (столбцов) матрицы;

2) умножение строки (столбца) матрицы на число, отличное от нуля;

3) прибавление к одной строке (столбцу) матрицы другой ее строки (соответственно столбца), умноженной на любое число.

Теорема 3.1 (об основном процессе). *Произвольная ненулевая матрица конечным числом элементарных преобразований только строк первого и третьего типов может быть приведена к верхней ступенчатой форме.*

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A \neq O$. Процесс приведения этой матрицы к верхней ступенчатой форме состоит в общем случае из $k = \min(m, n)$ шагов. Иногда, как это будет видно ниже, он обрывается раньше, давая нужный результат.

Первый шаг. а) Так как $A \neq O$, то в ней должен быть хотя бы один ненулевой столбец. Пусть k_1 – номер *первого* из них. В k_1-м столбце существует хотя бы один ненулевой элемент a_{ik_1}. Если $a_{1k_1} \neq 0$, то переходим к п. "б". Если же $a_{1k_1} = 0$, то, поменяв местами 1-ю и i-ю строки (т.е. выполнив элементарное преобразование *строк* первого типа), получим матрицу

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1k_1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2k_1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{mk_1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

в которой $a_{1k_1} \neq 0$. Хотя при таком переходе элементы матрицы A могли измениться, мы оставили прежние обозначения с тем, чтобы акцентировать внимание лишь на тактической стороне процесса.

б) Элемент a_{1k_1} назовем *ведущим (главным)* элементом первого шага. С его помощью аннулируем все расположенные под ним элементы k_1-го столбца. Для этого из всех строк, начиная со второй,

вычтем первую строку, умноженную на a_{2k_1}/a_{1k_1}, a_{3k_1}/a_{1k_1}, $\dots$, a_{mk_1}/a_{1k_1} соответственно (т.е. выполним элементарные преобразования *строк* третьего типа).

После выполнения первого шага матрица A перейдет в матрицу

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1k_1} & a_{1,k_1+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{2,k_1+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{m,k_1+1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

в которой *первая* строка является *первой* строкой строящейся верхней ступенчатой матрицы. Если при этом все строки, начиная со второй, стали нулевыми, то весь процесс заканчивается, так как матрица уже приведена к верхней ступенчатой форме. Если же в этих строках есть хотя бы один ненулевой элемент, т.е. если матрица

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{2,k_1+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m,k_1+1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \neq O,$$

то переходим ко второму шагу.

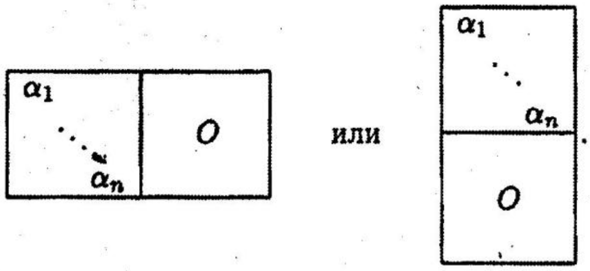
Второй шаг. Второй шаг аналогичен первому. Он состоит в применении к матрице A_1 процедуры описанного выше первого шага. При этом можно считать, что выполняются элементарные преобразования строк всей матрицы A, так как нулевые элементы этих строк, расположенные в первых k_1 столбцах, при элементарных преобразованиях строк не изменяются. В результате *второго* шага уже и *вторая* строка матрицы A станет *второй* строкой строящейся верхней ступенчатой матрицы.

Переход к следующему шагу аналогичен уже известному переходу от первого шага ко второму. Повторяя описанные преобразования на следующих шагах, самое большее через $k = \min(m, n)$ шагов мы получим требуемый результат. Отметим, что ведущим элементом i-го шага является первый ненулевой элемент i-й строки, т.е. a_{ik_i}.

Описанный здесь процесс будем называть *основным процессом* приведения матрицы к ступенчатой форме. ■

Приведение к диагональной форме. Незначительным изменением процесса, описанного в доказательстве теоремы 5.4, можно привести квадратную матрицу A общего вида к диагональной форме. Для этого достаточно элементарными преобразованиями строк и столбцов привести матрицу A к верхней трапециевидной форме, разделить каждую ненулевую строку трапециевидной матрицы на свой диагональный элемент, затем с помощью первого столбца аннулировать все наддиагональные элементы первой строки, с помощью второго столбца – все наддиагональные элементы второй строки, и т. д.

Этот же процесс, примененный к прямоугольной матрице, приведет ее к форме, называемой *прямоугольной диагональной формой*:



Билет 3

Перестановки. Упорядоченная совокупность чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, в которой

1) $\alpha_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i = \overline{1, n}$;

2) $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$,

называется *перестановкой* из чисел $1, 2, \ldots, n$.

Перестановка $1, 2, \ldots, n$ называется *натуральной*.

Замечание. Аналогично рассматриваются перестановки из n произвольных символов: достаточно перенумеровать эти символы и иметь дело с их номерами $1, 2, \ldots, n$[1].

Преобразование перестановки, при котором два ее числа α_i и α_j с номерами $i \neq j$ меняются местами, называется *транспозицией*.

Говорят, что два числа α_i и α_j в перестановке $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ образуют *инверсию (беспорядок)*, если большее из них предшествует меньшему, т.е. если $\alpha_i > \alpha_j$ при $i < j$, и *порядок* – в противном случае, т.е. если $\alpha_i < \alpha_j$ при $i < j$. Перестановка называется *четной*, если общее число инверсий в ней четно, и *нечетной* – в противном случае. Общее число инверсий в перестановке $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ обозначается символами $\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ или $\sigma(\alpha)$.

Теорема 4.1. *Число всевозможных перестановок из n чисел равно $n!$.*

Доказательство. Переберем все перестановки из n чисел. В качестве α_1 можно взять любое из этих чисел. Это дает n возможностей. В каждой из них α_1 уже выбрано и в качестве α_2 можно выбрать любое из $n-1$ оставшихся чисел. Это означает, что число различных способов выбрать α_1 и α_2 равно $n(n-1)$. Продолжая эти рассуждения, получим, что число различных способов выбрать $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ равно $n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$. ■

Теорема 4.2. *Каждая транспозиция меняет четность перестановки.*

Доказательство. 1. Пусть в перестановке $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ меняются местами два соседних числа α_i и α_{i+1}, т.е.

$$\ldots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots \longmapsto \ldots, \alpha_{i+1}, \alpha_i, \ldots$$

(здесь многоточия заменяют числа, которые не затрагивались при транспозиции). Очевидно, что в обеих перестановках числа, оставшиеся на местах, составляют одни и те же инверсии друг с другом и с числами α_i, α_{i+1}. Если числа α_i и α_{i+1} раньше составляли инверсию, то в новой перестановке она пропадает; если же они не составляли инверсию, то теперь появится одна новая инверсия. Таким образом, общее число инверсий в новой перестановке отличается от старой на единицу, т.е. четность при такой транспозиции меняется.

2. Пусть теперь между переставляемыми числами α_i и α_j расположено k чисел, т.е.

$$\ldots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{i+k}, \alpha_j \ldots \longmapsto \ldots, \alpha_j, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{i+k}, \alpha_i \ldots$$

Новую перестановку можно получить из старой, последовательно меняя местами соседние числа: α_i поменять местами $(k+1)$ раз с соседними числами $\alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \ldots, \alpha_{i+k}, \alpha_j$, а затем α_j поменять местами k раз с числами $\alpha_{i+k}, \ldots, \alpha_{i+2}, \alpha_{i+1}$. При этом четность перестановки изменится $2k+1$ раз. Следовательно, и при такой транспозиции четность перестановки меняется. ■

четность перестановки меняется. ■

Теорема 4.3. *Все $n!$ перестановок из n чисел могут быть упорядочены так, чтобы каждая последующая отличалась от предыдущей на одну транспозицию, причем начинать это упорядочение можно с любой перестановки.*

Доказательство. Проведем индукцию по n. Для $n = 2$ утверждение теоремы легко проверить: $(1,2),(2,1)$ и $(2,1),(1,2)$.

Пусть утверждение теоремы верно для $n-1$ чисел. Докажем его для n чисел. Пусть первая перестановка имеет вид $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

а) Сначала упорядочим все перестановки, начинающиеся с α_1. Таких перестановок $(n-1)!$, и по индуктивному предположению они могут быть упорядочены нужным образом, начиная с перестановки $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, так как это сводится к упорядочению перестановок из $n-1$ чисел, начиная с $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$.

б) Далее в последней перестановке из этого списка выполним одну транспозицию, поменяв местами числа α_1 и α_2. И снова упорядочим все перестановки, начинающиеся с α_2, и т.д. ■

Следствие 1. *При $n \geq 2$ число четных перестановок равно числу нечетных.* Действительно, после упорядочения в списке всех перестановок четные и нечетные перестановки будут чередоваться, а так как $n!$ четно при $n \geq 2$, то количества четных и нечетных перестановок совпадают и равны $n!/2$.

Следствие 2. *От каждой перестановки из n чисел можно перейти к любой другой перестановке из этих же чисел с помощью конечного числа транспозиций.*

Теорема 4.4. *Если $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – перестановка из первых n натуральных чисел с числом инверсий s, то после преобразования ее в натуральную перестановку индексные номера $1, 2, \dots, n$ образуют новую перестановку с тем же числом инверсий s.*

Доказательство. Рассмотрим в перестановке

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_n \tag{4.1}$$

любые ее два числа α_i и α_j.

Числа α_i и α_j образуют либо инверсию ($\alpha_i > \alpha_j$, $i < j$), либо порядок ($\alpha_i < \alpha_j$, $i < j$). После преобразования перестановки (4.1) в натуральную числа α_i и α_j будут располагаться следующим образом:

$1, 2, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_i, \dots, n$ в случае инверсии,

$1, 2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_j, \dots, n$ в случае порядка,

причем в обоих случаях $i < j$. Это означает, что числа α_i и α_j в перестановке (4.1) и их индексы i и j в перестановке индексных номеров одновременно образуют либо инверсию, либо порядок. Следовательно, обе эти перестановки имеют одинаковое число инверсий s. ■

Билет 4

Построение определителя n-го порядка. Пусть $A = (a_{ij})$ квадратная матрица n-го порядка. Рассмотрим произведение элементов этой матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца:

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}. \tag{4.2}$$

Заметим, что в этом произведении сомножители упорядочены в порядке возрастания номеров строк, при этом номера столбцов α_1, $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ образуют перестановку из чисел $1, 2, \dots, n$, так как $\alpha_i \in \{1, 2, \dots, n\}$ и $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$. Произведений вида (4.2) в матрице A столько, сколько существует перестановок $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ из n чисел, т.е. $n!$.

Определителем квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ *n-го порядка* называется сумма всевозможных произведений $a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}$ элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, причем если сомножители в этом произведении упорядочены в порядке возрастания номеров строк, то оно берется со знаком $(-1)^{\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}$.

Для обозначения определителя приняты символы $|A|$, $\det A$. Итак,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} (-1)^{\sigma(\alpha)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}, \tag{4.3}$$

где суммирование ведется по всевозможным перестановкам $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ из чисел $1, 2, \dots, n$.

Каждое произведение в сумме (4.3) называется *членом определителя*, а число $(-1)^{\sigma(\alpha)}$ – его *знаком*.

Из свойств перестановки следует, что число всевозможных членов определителя n-го порядка равно $n!$ и что при $n \geq 2$ число положительных членов равно числу отрицательных и равно $n!/2$.

Простейшие свойства определителя.

1°. *Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов.*

Действительно, если $A = (a_{ij})$ – треугольная (верхняя или нижняя, (1.2)) матрица n-го порядка, то все члены определителя этой матрицы, кроме $a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$, заведомо равны нулю. Поэтому

$$|A| = (-1)^{\sigma(1,2,\dots,n)} a_{11} a_{22} \dots a_{nn} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}. \blacksquare$$

2°. *Определитель квадратной матрицы не изменяется при ее транспонировании:* $|A| = |A^T|$.

только строчным или столбцовым ... матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ со-

3°. *Если одна из строк (столбцов) матрицы целиком состоит из нулей, то ее определитель равен нулю.*

Утверждение вытекает непосредственно из определения (4.3) определителя, если учесть, что в каждый член определителя входит множителем элемент из нулевой строки. ■

4°. *При умножении строки (столбца) матрицы на число ее определитель умножается на это число.*

Утверждение также вытекает из определения определителя, если учесть, что в каждое слагаемое суммы (4.3) это число входит множителем ровно один раз и его можно вынести за знак суммы. ■

Заметим, что свойство 4 означает, что общий множитель элементов строки (столбца) матрицы можно выносить за знак определителя.

5°. *Если каждый элемент некоторой строки матрицы представлен в виде суммы двух слагаемых:*

$$a_{ik} = b_k + c_k, \quad k = \overline{1, n},$$

то определитель матрицы можно представить в виде суммы двух определителей:

$$\begin{vmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ b' + c' \\ \vdots \\ a'_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ b' \\ \vdots \\ a'_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ c' \\ \vdots \\ a'_n \end{vmatrix},$$

где $b' = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $c' = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

Утверждение вытекает из определения (4.3), если учесть, что

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a_{i\alpha_i} \cdots a_{n\alpha_n} =$$
$$= a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots b_{\alpha_i} \cdots a_{n\alpha_n} + a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots c_{\alpha_i} \cdots a_{n\alpha_n}. \quad \blacksquare$$

Аналогичное свойство справедливо для столбцов.

Замечание 1. Свойства 4 и 5 часто объединяют, называя их *свойством линейности определителя* относительно строк и столбцов.

6°. *При перестановке местами двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак.*

Доказательство. Пусть в матрице $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ переставляются i-й и j-й столбцы и B – результат этой перестановки:

$$A = [a_1 \ldots a_i \ldots a_j \ldots a_n], \quad B = [a_1 \ldots a_j \ldots a_i \ldots a_n].$$

Очевидно, что определители матриц A и B состоят из одних и тех же членов. Сравним их знаки. Члену $a_{\alpha_1 1} \cdots a_{\alpha_i i} \cdots a_{\alpha_j j} \cdots a_{\alpha_n n}$ в $|A|$ соответствует перестановка $\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_n$, а в $|B|$ – перестановка $\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n$. Эти перестановки отличаются друг от друга одной транспозицией, т.е. имеют разную четность. Отсюда следует, что все члены определителя $|A|$ входят в определитель $|B|$ с противоположными знаками. Это означает, что $|A| = -|B|$. ■

Замечание 2. Отметим, что свойство 6 относится к случаю, когда переставляются строки (столбцы) с разными номерами.

7°. *Определитель матрицы, имеющей две одинаковые строки (столбца), равен нулю.*

Утверждение вытекает из свойства 6: достаточно в матрице поменять местами одинаковые строки, тогда $|A| = -|A| = 0$. ■

8°. *Если одна строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией других ее строк (столбцов), то определитель матрицы равен нулю.*

Утверждение вытекает из свойства линейности определителя и свойства 7. ■

9°. *Если к какой-либо строке (столбцу) матрицы прибавить линейную комбинацию других ее строк (столбцов), то ее определитель не изменится.*

Утверждение вытекает из свойств 5 и 8. ■

Билет 5

2°. *Определитель квадратной матрицы не изменяется при ее транспонировании:* $|A| = |A^T|$.

Доказательство. Определитель матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ состоит из членов вида (4.2). Все множители из произведения (4.2) и в матрице A^T находятся в разных строках и разных столбцах. Следовательно, $|A|$ и $|A^T|$ состоят из одних и тех же членов.

Сравним их знаки. Знак произведения (4.2) как члена $|A|$ определяется четностью перестановки $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Определим его знак как члена $|A^T|$. Имеем $a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots a_{n\alpha_n} = a^t_{\alpha_1 1}a^t_{\alpha_2 2}\ldots a^t_{\alpha_n n}$. Упорядочим во втором произведении сомножители в порядке возрастания номеров строк, т.е. так, чтобы номера строк образовали натуральную перестановку: $a^t_{\alpha_1 1}a^t_{\alpha_2 2}\ldots a^t_{\alpha_n n} = a^t_{1\beta_1}a^t_{2\beta_2}\ldots a^t_{n\beta_n}$. Знак произведения (4.2) как члена $|A^T|$ определяется четностью перестановки $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$. Но эта перестановка совпадает с перестановкой индексных номеров в перестановке α после преобразования ее в натуральную. Согласно теореме 4.4, $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$. Таким образом, $|A|$ и $|A^T|$ являются суммами одинаковых слагаемых, т.е. совпадают. ■

Следствие 3. *В определении* (4.3) *определителя можно поменять ролями строки и столбцы:*

$$|A| = \sum_{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} (-1)^{\sigma(\alpha)} a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} \ldots a_{\alpha_n n},$$

так как эта сумма равна $|A^T|$.

Из доказанного свойства вытекает и более общий вывод: строки и столбцы матрицы равноправны с точки зрения свойств определителя.

Билет 6

Теорема 4.7 *Определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей матриц-сомножителей.*

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ – квадратные матрицы n-го порядка. Рассмотрим матрицу C вида

$$C = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & O & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & & & & \\ \hline -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array}\right].$$

С одной стороны, C – квазитреугольная матрица, поэтому согласно (4.11)

$$|C| = |A| \cdot |B|. \tag{4.12}$$

С другой стороны, не меняя определителя матрицы C, преобразуем ее так, чтобы клетка A стала нулевой. Сначала аннулируем первую строку матрицы A, для чего прибавим к первой строке матрицы C ее $(n+1)$-ю, $(n+2)$-ю, $\dots, 2n$-ю строки, умноженные на $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ соответственно. В результате этих преобразований $\det C$ остается без изменения, первые n элементов первой строки матрицы C станут нулевыми, а вторые n элементов заполнятся элементами первой строки матрицы AB. Теперь в новой матрице выполним аналогичные преобразования второй строки: ко второй строке матрицы C прибавим ее $(n+1)$-ю, $(n+2)$-ю, $\dots, 2n$-ю строки, умноженные на $a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}$ соответственно. После этих преобразований определитель матрицы C не изменится, первые n элементов второй строки матрицы C станут нулевыми, а вторые n элементов заполнятся элементами второй строки матрицы AB. Выполнив аналогичные преобразования с третьей, $\dots$, n-й строкой матрицы C, получим матрицу

$$C_1 = \left[\begin{array}{c|c} O & AB \\ \hline -I & B \end{array}\right],$$

определитель которой равен определителю матрицы C. Переставив в матрице C_1 первый и $(n+1)$-й столбцы, второй и $(n+2)$-й столбцы, $\dots, n$-й и $2n$-й столбцы, получим квазитреугольную матрицу

$$C_2 = \left[\begin{array}{c|c} AB & O \\ \hline B & -I \end{array}\right],$$

определитель которой отличается от определителя матрицы C_1 множителем $(-1)^n$. Таким образом, $|C| = |C_1| = (-1)^n|C_2| = |AB|$. Отсюда и из равенства (4.12) получаем, что

$$|AB| = |A| \cdot |B|. \quad \blacksquare \tag{4.13}$$

Билет 7

Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $k \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le \min(m,n)$. Выберем в матрице A произвольные k строк и k столбцов с номерами $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ и $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$ соответственно. Элементы матрицы A, находящиеся на пересечении выбранных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу k-го порядка. Определитель этой матрицы называется *минором* k-го порядка матрицы A, расположенным в строках с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и столбцах с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$. Для обозначения миноров приняты символы $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$, $M\binom{i_1 i_2 \ldots i_k}{j_1 j_2 \ldots j_k}$, M_k, M. Итак,

$$M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \ldots & a_{i_1 j_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_k j_1} & \ldots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}.$$

Пусть теперь $A = (a_{ij})$ – квадратная матрица n-го порядка и $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ – ее минор, причем $k < n$. Если в матрице A вычеркнуть строки и столбцы, в которых расположен заданный минор, то оставшиеся элементы матрицы A образуют квадратную матрицу $(n-k)$-го порядка. Определитель этой матрицы называется *дополнительным минором к минору* $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$. Дополнительный минор обозначается символами $\overline{M}^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$, $\overline{M}$, M^{σ}. Очевидно, что исходный минор является дополнительным к своему дополнительному минору. Дополнительный минор к минору $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$, взятый со знаком $(-1)^{\sum_{p=1}^{k}(i_p+j_p)}$, называется *алгебраическим дополнением* к минору $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ и обозначается символом $A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$. Итак,

$$A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} = (-1)^{i_1+i_2+\ldots+j_1+j_2+\ldots+j_k}\overline{M}^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}.$$

Теорема 4.5 (теорема Лапласа). *Пусть* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *и* $k \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le n-1$. *Пусть в матрице* A *выбраны произвольные* k *строк (или столбцов). Тогда определитель матрицы* A *равен сумме всевозможных произведений миноров* k*-го порядка, расположенных в выбранных строках (соответственно столбцах), на их алгебраические дополнения.*

Доказательство. Пусть выбраны строки с номерами $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$. Следует доказать, что

$$\det A = \sum_{(j_1, j_2, \ldots, j_k)} M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}, \tag{4.6}$$

где суммирование ведется по всевозможным значениям $j_1, j_2, \ldots, j_k$ $(1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_k \le n)$.

Для доказательства рассмотрим подробнее правую часть требуемого равенства (4.6). Минор $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$, как определитель k-го порядка, представляет собой сумму произведений k элементов матрицы A. Точно так же и алгебраическое дополнение $A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ является суммой произведений $n-k$ элементов матрицы A. Значит, произведение $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$, а следовательно, и вся правая часть (4.6) представляет собой сумму произведений n элементов матрицы A. Обозначим эту сумму через S и покажем, что она совпадает с $\det A$ как с суммой (4.3) членов определителя с соответствующими знаками.

1. Сначала покажем, что произведение $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ представляет собой некоторую сумму членов $\det A$, причем с теми же знаками, с какими они входят в $\det A$.

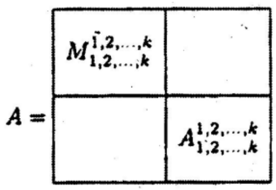


Рис. 1

а) В простейшем случае, когда минор $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ находится в левом верхнем углу матрицы A (рис. 1), дополнительный минор будет занимать правый нижний угол, при этом он будет совпадать с алгебраическим дополнением, так как $(-1)^{(1+2+\ldots+k)+(1+2+\ldots+k)} = 1$.

Возьмем произвольный член минора $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$: $(-1)^{\sigma(\alpha)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{k\alpha_k}$ и произвольный член дополнительного к нему минора:

$$(-1)^{\sigma(\beta)} a_{k+1,\beta_{k+1}} a_{k+2,\beta_{k+2}} \cdots a_{n\beta_n}.$$

Тогда произведение $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ есть сумма произведений вида

$$(-1)^{\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a_{k\alpha_k} a_{k+1,\beta_{k+1}} \cdots a_{n\beta_n}.$$

В этом произведении все сомножители находятся в разных строках и разных столбцах матрицы A, следовательно, оно будет членом $\det A$. Знак этого члена равен $(-1)^{\sigma(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\beta'_{k+1},\ldots,\beta'_n)}$, где $\beta'_j = \beta_j + k$. Но $\sigma(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\beta'_{k+1},\ldots,\beta'_n) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta')$, так как никакое α_i ни с каким β'_j не образует инверсий: все $\alpha_i \le k$, а все $\beta'_j > k$. При этом $\sigma(\beta') = \sigma(\beta)$, так как все инверсии и порядки в обеих перестановках сохраняются. Таким образом, произведение $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ представляет собой некоторую сумму членов $\det A$, причем с теми же знаками, с какими они входят в $\det A$.

б) Общий случай минора $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ сводится к рассмотренному следующим образом. Будем переставлять i_1-ю строку матрицы A последовательно со всеми предыдущими до тех пор, пока она не займет место первой строки. Затем точно так же будем переставлять i_2-ю, $\ldots$, i_k-ю строки до тех пор, пока они не займут места второй, $\ldots$, k-й строк соответственно. Аналогично переставим j_1-й, j_2-й, $\ldots$, j_k-й столбцы до тех пор, пока они не займут места первого, второго, $\ldots$, k-го столбцов. При этом всего будет выполнено

$$\begin{aligned}(i_1 - 1) + \ldots + (i_k - k) + (j_1 - 1) + \ldots + (j_k - k) = \\ = (i_1 + \ldots + i_k) + (j_1 + \ldots + j_k) - 2(1 + \ldots + k)\end{aligned} \qquad (4.7)$$

перестановок строк и столбцов матрицы A. В результате этих перестановок матрица A преобразуется в матрицу B, в которой рассматриваемый минор $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ матрицы A займет левый верхний угол. Так как при указанных преобразованиях взаимное расположение строк и столбцов дополнительного минора не изменилось, то дополнительный минор к минору $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ в матрице A останется дополнительным к нему и в матрице B. Из п. "а" следует, что произведение $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} \overline{M}^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ является суммой членов $\det B$ с теми же знаками, с какими они входят в $\det B$. Но, согласно свойству 6 определителя и равенству (4.7), $\det A = (-1)^{(i_1+\ldots+i_k)+(j_1+\ldots+j_k)} \det B$. Следовательно, слагаемые произведения $(-1)^{(i_1+\ldots+i_k)+(j_1+\ldots+j_k)} M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} \overline{M}^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ входят в $\det A$ со своими знаками.

2. Из доказанного в п. 1 следует, что вся сумма S представляет собой некоторую сумму членов $\det A$ со своими знаками.

3. Покажем теперь, что в сумму S входят все члены $\det A$. Пусть

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a_{n\alpha_n} \qquad (4.8)$$

– произвольный член $\det A$. В этом произведении соберем отдельно сомножители, расположенные в строках с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$:

$$a_{i_1\alpha_{i_1}} a_{i_2\alpha_{i_2}} \cdots a_{i_k\alpha_{i_k}}. \qquad (4.9)$$

Они расположены в различных столбцах с номерами $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k}$. Эти номера однозначно определяются заданием члена (4.8). Обозначим через M минор k-го порядка матрицы A, расположенный в строках с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и столбцах с номерами $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k}$. Тогда произведение (4.9) будет членом этого минора, а произведение остальных сомножителей (4.8), не вошедших в (4.9), – членом дополнительного минора $\overline{M}$ к минору M. Итак, любой член определителя матрицы A может быть получен умножением определенного этим членом минора M на дополнительный к нему минор $\overline{M}$. Из доказанного в п. 1 следует, что при умножении минора M на его алгебраическое дополнение получится член (4.8) с его знаком.

4. Осталось доказать, что каждый член $\det A$ входит в сумму S ровно один раз и что других слагаемых в этой сумме нет. Для этого достаточно показать, что количество слагаемых в сумме S равно $n!$. Действительно, минор $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ состоит из $k!$ слагаемых, алгебраическое дополнение к нему – из $(n-k)!$ слагаемых. Значит, произведение $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ состоит из $k!(n-k)!$ членов определителя матрицы A. Таких произведений в сумме S столько, сколько существует миноров k-го порядка в строках $i_1, i_2, \ldots, i_k$, т.е. столько, сколько существует способов выбрать k столбцов $j_1, j_2, \ldots, j_k$ из n столбцов матрицы A. Итак, имеется C_n^k таких произведений, а количество слагаемых в сумме S равно $C_n^k k!(n-k)! = n!$. ■

Билет 8

Условие обратимости. Матрица A^{-1} называется *обратной к матрице* A, если $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Матрица A, для которой существует обратная матрица, называется *обратимой*.

Из определения следует, что обратимой может быть лишь квадратная матрица, так как равенство $AA^{-1} = A^{-1}A$ возможно лишь для квадратных матриц A и A^{-1} одинакового порядка. Но не каждая квадратная матрица обратима. Так, матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ при умножении справа на любую матрицу дает матрицу с нулевой первой строкой, т.е. ни для какой матрицы B произведение AB не может совпадать с единичной матрицей I. Выясним, какие свойства матрицы обеспечивают ее обратимость.

Квадратная матрица A называется *вырожденной (особенной)*, если $|A| = 0$, и *невырожденной (неособенной)*, если $|A| \neq 0$.

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Матрица

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}, \tag{5.1}$$

составленная из алгебраических дополнений A_{ij} к элементам a_{ij} матрицы A, называется *присоединенной (взаимной)* к матрице A.

Теорема 5.1 (о фальшивом разложении определителя). *Сумма произведений элементов одной строки (столбца) матрицы на алгебраические дополнения к элементам другой ее строки (соответственно столбца) равна нулю.*

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Покажем, что для любых ее двух строк i, j, где $i \neq j$,

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is}A_{js} = 0 \tag{5.2}$$

Рассмотрим вспомогательную матрицу B, которая отличается от A только j-й строкой: на месте j-й строки в B находится i-я строка матрицы A.

С одной стороны, $\det B = 0$ (§4, свойство 7). С другой стороны, $\det B = \sum_{s=1}^{n} a_{is}A_{js}$, так как в разложении $\det B$ по j-й строке алгебраические дополнения к элементам j-й строки матрицы B получаются вычеркиванием j-й строки и поэтому совпадают с алгебраическими дополнениями A_{js} к элементам j-й строки матрицы A. Отсюда следует (5.2). Аналогично доказывается столбцовый вариант теоремы. ∎

Доказанную теорему иногда называют теоремой о "чужих" алгебраических дополнениях. Напомним, что в этой терминологии умножение на "свои" алгебраические дополнения дает разложение (4.10) определителя по строке (столбцу соответственно).

Теорема 5.2 (критерий обратимости). *Матрица обратима тогда и только тогда, когда она не вырождена.*

Доказательство. Необходимость. Пусть матрица A обратима. Тогда существует обратная матрица A^{-1} такая, что $AA^{-1} = I$. Взяв определители от обеих частей этого равенства, согласно (4.13) получим, что $|A|\cdot|A^{-1}| = |I|$, т.е. $|A|\cdot|A^{-1}| = 1$. Следовательно, $|A| \neq 0$.

Достаточность. Пусть $|A| \neq 0$. Покажем, что матрица $\frac{1}{|A|}\widehat{A}$ является обратной к матрице A. В самом деле, из разложения определителя по строке (столбцу) и теоремы 5.1 имеем, что $A\widehat{A} = \widehat{A}A = |A|I$. Следовательно, $A\frac{1}{|A|}\widehat{A} = \frac{1}{|A|}\widehat{A}A = I$, т.е.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widehat{A}. \quad \blacksquare \tag{5.3}$$

Теорема 5.3 (о единственности обратной матрицы). *Если A - квадратная матрица и $AB = I$ (или $BA = I$), то $B = A^{-1}$.*

Доказательство. Из равенства $AB = I$ следует, что B – квадратная матрица и, согласно (4.13), A не вырождена. Следовательно, матрица A обратима и для нее существует обратная матрица A^{-1}. Тогда $A^{-1} = A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = IB = B$. Таким образом, $B = A^{-1}$. Аналогично рассматривается случай, когда $BA = I$. ■

Доказанная теорема устанавливает свойство единственности обратной матрицы, и, более того, из нее следует, что для квадратной матрицы A одного из равенств $AA^{-1} = I$ или $A^{-1}A = I$ достаточно, чтобы матрица A^{-1} была обратной к матрице A.

Некоторые свойства обратной матрицы.

1. $I^{-1} = I$, так как $I \cdot I = I$.
2. $|A^{-1}| = 1/|A|$, так как $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$.
3. $(A^{-1})^{-1} = A$, так как $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.
4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, так как $(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T = I^T = I$.
5. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, так как $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$.

Вычисление обратной матрицы.

Теорема 5.4. *Произвольная невырожденная матрица элементарными преобразованиями только строк (только столбцов) приводится к единичной матрице.*

Доказательство. Рассмотрим строчный вариант теоремы. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $\det A \neq 0$. Применим к матрице A основной процесс (теорема 3.1). Так как A - квадратная матрица, то окончательная ступенчатая матрица будет треугольной. Ввиду невырожденности исходной матрицы она также будет невырожденной и ее диагональные элементы будут отличны от нуля. Разделив каждую *строку* на ее диагональный элемент, т.е. выполнив элементарные преобразования строк, получим треугольную матрицу вида

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$

Если представить процесс приведения матрицы к верхней ступенчатой форме как преобразование матрицы "слева направо" (в таком порядке аннулируются столбцы), то теперь будем выполнять аналогичные преобразования "справа налево". На первом шаге с помощью последней строки аннулируем все наддиагональные элементы последнего столбца, вычитая из первых $(n-1)$ строк последнюю строку, умноженную на $a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{n-1,n}$ соответственно. На втором шаге из первых $(n-2)$ строк вычитаем $(n-1)$-ю строку, умноженную на $a_{1,n-1}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n-2,n-1}$ соответственно. Выполнив аналогичные преобразования, через $(n-1)$ шагов получим единичную матрицу. Отметим, что на каждом шаге изменяются элементы только одного аннулируемого столбца. Если в доказательстве поменять ролями строки и столбцы, то получим утверждение столбцового варианта теоремы. ■

Билет 9

Определения. Мы будем рассматривать множества, наделенные двумя законами композиции: внутренним и внешним (§9). Внутренний закон композиции будем называть сложением, а внешний – умножением на вещественное число. Согласно этой терминологии на этих множествах указаны два правила:

- правило, посредством которого любой упорядоченной паре элементов a, b множества ставится в соответствие однозначно определенный элемент $a+b$ из этого же множества, называемый суммой элементов a и b;
- правило, посредством которого любому вещественному числу α и любому элементу a множества ставится в соответствие однозначно определенный элемент αa этого же множества, называемый произведением элемента a на число α.

Непустое множество V называется *вещественным линейным пространством* [1], если на нем заданы два закона композиции:

внутренний закон композиции, подчиненный аксиомам

1) $a+b=b+a$, $\forall a, b \in V$ (аксиома коммутативности),
2) $(a+b)+c=a+(b+c)$, $\forall a, b, c \in V$ (аксиома ассоциативности),
3) $\exists\, \theta \in V : a+\theta=a$, $\forall a \in V$,
4) $\forall\, a \in V \;\; \exists\, (-a) \in V$: $a+(-a)=\theta$;

внешний закон композиции, подчиненный аксиомам

5) $1 \cdot a=a$, $\forall a \in V$,
6) $(\alpha\beta)a=\alpha(\beta a)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall a \in V$;

и если оба закона связаны между собой аксиомами

7) $(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall a \in V$ (аксиома дистрибутивности умножения на число относительно сложения чисел),
8) $\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall a, b \in V$ (аксиома дистрибутивности умножения на число относительно сложения элементов V).

Линейное пространство называют также *векторным пространством.*

Элементы линейного пространства называются *векторами.* Использование этого термина не случайно, геометричность терминологии подчеркивает геометрический характер абстрактных алгебраических понятий, делает их "наглядными" и помогает уяснить, а зачастую и предвидеть не всегда очевидные факты.

Вектор θ называется *нулевым* вектором пространства, а вектор $(-a)$ – *противоположным вектору* a. Нулевой вектор обозначают также символом $\mathbf{0}$.

Разностью векторов b и a линейного пространства V называется вектор $x \in V$ такой, что $a+x=b$. Обозначение: $b-a$.

3. Арифметическое (координатное) пространство $\mathbb{R}^n$. Пусть $\mathbb{R}^n$ – множество всевозможных упорядоченных наборов n действительных чисел, называемых *арифметическими векторами* (или *n-мерными векторами*). Если арифметические векторы записывать в виде $a=(a_1, \ldots, a_n)$, то $\mathbb{R}^n=\{a=(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{R}, i=\overline{1, n}\}$.

Два арифметических вектора $a=(a_1, \ldots, a_n)$ и $b=(b_1, \ldots, b_n)$ называются *равными*, если $a_i=b_i$, $i=\overline{1, n}$.

Операции над арифметическими векторами вводятся следующим образом: $a+b=(a_1+b_1, \ldots, a_n+b_n)$, $\alpha a=(\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Нетрудно проверить, что $\mathbb{R}^n$ – вещественное линейное пространство относительно введенных операций.

Замечание 1. Отметим, что $\mathbb{R}^n$ – декартова n-я степень множества $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел.

Замечание 2. Иногда из соображений удобства мы будем записывать арифметические векторы в виде столбцов.

Замечание 3. Арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$ совпадает с пространством матриц $\mathbb{R}^{1\times n}$ или $\mathbb{R}^{n\times 1}$.

Простейшие свойства линейных пространств. Следующие свойства линейных пространств являются элементарными следствиями из аксиом.

1°. *В линейном пространстве существует единственный нулевой вектор*, так как если θ_1 и θ_2 – два нулевых вектора, то из аксиомы 3 следует, что $\theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2$.

Замечание 4. Говоря о единственности нулевого вектора, мы не различаем равные векторы. В этом же смысле следует понимать и другие утверждения о единственности.

2°. *Для любого вектора линейного пространства существует единственный противоположный вектор*, так как если b и c – два противоположных вектора к вектору a, то, последовательно применяя аксиомы 3, 4, 2, получим, что $b = b + (a + c) = (b + a) + c = c$.

3°. *В линейном пространстве справедливы равенства*: $0a = \theta$, $\forall a \in V$ *и* $\alpha\theta = \theta$, $\forall \alpha \in \mathbf{R}$.

Доказательство. Для доказательства первого равенства достаточно проверить, что $b + 0a = b$, $\forall b \in V$. Это соотношение вытекает из следующей цепочки равенств, основанных на аксиомах 2—7:

$$b + 0a = (b + \theta) + 0a = b + ((-a) + a) + 0a = (b + (-a)) + a + 0a =$$
$$= (b + (-a)) + 1a + 0a = (b + (-a)) + (1 + 0)a = (b + (-a)) + a =$$
$$= b + ((-a) + a) = b + \theta = b.$$

Второе равенство доказывается с помощью первого и аксиомы 6: если a – произвольный вектор пространства, то $\alpha\theta = \alpha(0a) = (\alpha 0)a = 0a = \theta$. ■

4°. *В линейном пространстве из равенства* $\alpha a = \theta$ *следует, что либо* $\alpha = 0$, *либо* $a = \theta$.

В самом деле, как следует из свойства 3°, случай $\alpha = 0$ возможен, если $\alpha a = \theta$. В случае когда $\alpha \neq 0$, на основании свойства 3° и аксиом 5, 6 получим

$$a = 1a = \left(\frac{1}{\alpha}\alpha\right)a = \frac{1}{\alpha}(\alpha a) = \frac{1}{\alpha}\theta = \theta.$$

5°. *В линейном пространстве для любого вектора* a *противоположный вектор может быть получен как произведение*:

$$-a = (-1)a.$$

Это утверждение вытекает из аксиом 3—5, 7 и свойства 3°, так как

$$a + (-1)a = 1a + (-1)a = (1 - 1)a = 0a = \theta.$$

6°. *Для любой пары векторов* a *и* b *линейного пространства существует, и притом единственная, разность* $b - a$.

Доказательство. Вектор $b + (-a)$ является разностью $b - a$ векторов a и b, так как на основании аксиом 1—4 и определения разности имеем

$$a + (b + (-a)) = (a + (-a)) + b = \theta + b = b.$$

При этом если c – любая другая разность $b - a$, то из аксиом 2—4 следует, что $c = c + \theta = c + (a + (-a)) = (c + a) + (-a) = b + (-a)$. ■

Билет 10

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ – векторы линейного пространства V и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ – действительные числа. Вектор $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k$ называется *линейной комбинацией векторов* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *с коэффициентами* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Если вектор b является линейной комбинацией векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$, то говорят, что *вектор b линейно выражается через векторы* $a_1, a_2, \ldots, a_k$, при этом представление вектора b в виде $b = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k$ называют *разложением вектора b по векторам* $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Очевидно, нулевой вектор линейно выражается через любой вектор, так как $\theta = 0a$, $\forall a \in V$. Через нулевой вектор не может выражаться ни один ненулевой вектор, так как $\alpha\theta = \theta$, $\quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Линейная комбинация называется *тривиальной*, если все ее коэффициенты равны нулю, и *нетривиальной*, если среди ее коэффициентов хотя бы один отличен от нуля. Очевидно, тривиальная комбинация любой системы векторов равна нулевому вектору.

Система векторов a_1, a_2, ... , a_k называется *линейно зависимой*, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору, т.е. если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, одновременно не равные нулю и такие, что

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k = \theta, \tag{14.1}$$

и *линейно независимой*, если нулевому вектору равна только тривиальная линейная комбинация этих векторов, т.е. если из равенства (14.1) следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$.

Теорема 14.1. *Система из одного вектора линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.*

Доказательство. Линейная зависимость системы из одного вектора a равносильна тому, что $\alpha a = \theta$ при некотором $\alpha \neq 0$, а это, в свою очередь, равносильно (§13, свойства 3, 4) тому, что $a = \theta$. ■

Теорема 14.2. *Система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$, где $k > 1$, линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов этой системы линейно выражается через другие.*

Доказательство. Необходимость. Если система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно зависима, то существуют числа α_1, α_2, ... , α_k, одновременно не равные нулю и такие, что

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_i a_i + \ldots + \alpha_k a_k = \theta. \tag{14.2}$$

Пусть $\alpha_i \neq 0$. Тогда в силу (14.2) $a_i = \sum_{s \neq i} (-\alpha_s/\alpha_i) a_s$. Так как $k > 1$, то для вектора a_i существует хотя бы один "другой" вектор системы.

Достаточность. Пусть $a_i = \sum_{s \neq i} \alpha_s a_s$. Тогда, перенеся правую часть этого равенства в левую, получим нетривиальную линейную комбинацию векторов системы, равную нулевому вектору:

$$-\alpha_1 a_1 - \ldots - \alpha_{i-1} a_{i-1} + 1a_i - \alpha_{i+1} a_{i+1} - \ldots - \alpha_k a_k = \theta. \ ■$$

Эта теорема дает другое определение линейной зависимости системы векторов, в которой содержится более одного вектора.

Теорема 14.3. *Если подсистема системы векторов линейно зависима, то и вся система линейно зависима.*

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать подсистемой системы векторов $a_1, a_2, \ldots, a_s, \ldots, a_k$ ее первые s векторов. Из линейной зависимости $a_1, a_2, \ldots, a_s$ следует, что $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_s a_s = \theta$ для некоторых чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, среди которых существует $\alpha_i \neq 0$. Тогда $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_s a_s + 0a_{s+1} + \ldots + 0a_k = \theta$, причем $\alpha_i \neq 0$. Следовательно, система векторов a_1, a_2, ... , a_s, ... , a_k линейно зависима. ■

$a_2, \ldots, a_s, \ldots, a_k$ линейно зависима. ■

Теорема 14.4. *Любая подсистема линейно независимой системы векторов линейно независима.*

В самом деле, если бы существовала линейно зависимая подсистема, то на основании теоремы 14.3 вся система была бы линейно зависимой. ■

Теорема 14.5. *Система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно независима тогда и только тогда, когда любой вектор, являющийся линейной комбинацией этих векторов, имеет единственное разложение по этим векторам.*

Доказательство. Необходимость доказывается от противного. Пусть существует вектор b, который имеет два различных разложения по векторам $a_1, a_2, \ldots, a_k$: $b = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i$, $b = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i' a_i$,

$\exists \alpha_s \neq \alpha_s'$. Вычитая почленно одно равенство из другого, получим нетривиальную линейную комбинацию векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$, равную нулевому вектору. Отсюда следует линейная зависимость системы векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Достаточность также доказывается от противного. Пусть система $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно зависима, тогда

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k = \theta \tag{14.3}$$

для некоторых чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, среди которых существует $\alpha_s \neq 0$. Но, с другой стороны,

$$0a_1 + 0a_2 + \ldots + 0a_k = \theta. \tag{14.4}$$

Мы получили два различных разложения (14.3) и (14.4) нулевого вектора θ по векторам $a_1, a_2, \ldots, a_k$, что невозможно. ■

Теорема 14.6. *Если система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно независима, а система $a_1, a_2, \ldots, a_k, b$ линейно зависима, то вектор b линейно выражается через векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$.*

Доказательство. Из линейной зависимости системы векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k, b$ следует, что

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k + \alpha_0 b = \theta \tag{14.5}$$

для некоторых чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha_0$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля. Если $\alpha_0 = 0$, то ненулевой коэффициент α_s находится среди чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$; при этом (14.5) переходит в равенство $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k = \theta$, где $\alpha_s \neq 0$, $1 \le s \le k$, которое противоречит условию линейной независимости $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Следовательно, $\alpha_0 \neq 0$; отсюда и из (14.5) получаем, что $b = \sum_{i=1}^{k} (-\alpha_i/\alpha_0)\, a_i$. ■

Примеры. 1. Арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$. В арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$ единичные векторы

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1) \end{aligned} \tag{14.6}$$

линейно независимы. Это следует из того, что линейная комбинация этих векторов с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ представляет собой арифметический вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, который равен нулевому вектору $\theta = (0, \ldots, 0)$ тогда и только тогда, когда $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1, n}$.

2. Пространство многочленов. Многочлены $1, t, t^2, \ldots, t^n$ линейно независимы. Это следует из того, что линейная комбинация этих многочленов с коэффициентами $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ представляет собой многочлен $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k$, который равен нулевому многочлену тогда и только тогда, когда $\alpha_k = 0$, $k = \overline{0, n}$.

Билет 11

Базисом линейного пространства называется упорядоченная линейно независимая система векторов пространства, через которую линейно выражается любой вектор пространства. Согласно этому определению система векторов $e_1, \dots, e_n$ линейного пространства V образует базис V, если

- $e_1, \dots, e_n$ линейно независима,
- для любого вектора $x \in V$ существуют числа $x_1, \dots, x_n$ такие, что $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.

Теорема 17.1. *Система векторов $e_1, \dots, e_n$ линейного пространства является его базисом тогда и только тогда, когда она образует максимальную линейно независимую систему векторов этого пространства.*

Доказательство. Необходимость. Базис пространства является максимальной линейно независимой системой векторов в этом пространстве, так как любая бóльшая система векторов линейно выражается через этот базис (т.е. через меньшую систему) и на основании теоремы 16.2 линейно зависима.

Достаточность. Пусть $e_1, \dots, e_n$ – максимальная линейно независимая система векторов пространства V, тогда для любого вектора $x \in V$ система векторов $e_1, \dots, e_n, x$ линейно зависима, так как содержит более чем n векторов. Из теоремы 14.6 следует, что вектор x является линейной комбинацией $e_1, \dots, e_n$. Следовательно, векторы $e_1, \dots, e_n$ образуют базис пространства V. ■

Теорема 17.1 дает другое определение базиса.

Итак, все базисы одного линейного пространства состоят из одинакового числа векторов, равного максимальному числу линейно независимых векторов этого пространства. Это означает, что число векторов базиса является характеристикой не столько базиса, сколько самого пространства. Число векторов базиса называется *размерностью* линейного пространства. Размерность нулевого пространства по определению считается равной нулю. Обозначение: $\dim V$. Из теоремы 17.1 следует, что размерность линейного пространства равна максимальному числу линейно независимых векторов этого пространства. Линейное пространство размерности n, где n – целое неотрицательное число, называется n-мерным пространством. Любое n-мерное пространство называется *конечномерным линейным пространством*.

Конечномерными пространствами не исчерпываются все линейные пространства: не во всяком пространстве можно указать максимальное число линейно независимых векторов. Линейное пространство называется *бесконечномерным*, если для любого $k \in \mathbb{N}$ в нем найдется линейно независимая система из k векторов. Из определения размерности и теоремы 17.1 вытекают следующие утверждения.

Утверждение 1. *В n-мерном пространстве любые n линейно независимых векторов образуют базис.*

Утверждение 2. *В n-мерном пространстве любая система из s векторов, где $s > n$, линейно зависима.*

Примеры. 1. Геометрические пространства V_1, V_2, V_3. Из результатов §15 следует, что $\dim V_n = n$, где $n = 1, 2, 3$.

2. Арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$. В пространстве $\mathbb{R}^n$ единичные векторы (14.6) образуют базис, так как они линейно независимы и, как нетрудно проверить, любой вектор $a = (a_1, \dots, a_n)$ пространства $\mathbb{R}^n$ линейно выражается через них: $a = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$. Итак, $\dim \mathbb{R}^n = n$.

3. Пространство матриц $\mathbb{R}^{m\times n}$. Рассмотрим матрицы E_{11}, E_{12}, ... , E_{1n}, E_{21}, ... , E_{mn}, у которых все элементы равны нулю, кроме одного: в матрице E_{ij} элемент в позиции (i,j) равен единице.

а) Эти матрицы линейно независимы, так как из того, что

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = O\,,$$

следует, что $a_{ij} = 0, \quad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$

б) Любая матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ является линейной комбинацией этих матриц (как видно из п."а"). Следовательно, эти матрицы образуют базис $\mathbb{R}^{m\times n}$ и $\dim \mathbb{R}^{m\times n} = mn$.

4. Пространство многочленов M_n. Многочлены $1, t, t^2$, ... , t^n образуют базис M_n, так как они линейно независимы (§14), а любой многочлен $p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n \in M_n$ является линейной комбинацией этих многочленов с коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Итак, $\dim M_n = n + 1$.

5. Пространство M_∞ многочленов всех степеней (§13, пример 4) бесконечномерно, так как для любого $k \in \mathbb{N}$ можно указать k линейно независимых многочленов: $1, t, t^2, \ldots, t^{k-1}$.

Билет 12

Переход к другому базису. Пусть $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ и $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ – два базиса n-мерного пространства V. Выясним, как меняются координаты вектора при переходе от базиса e к базису f.

Векторы второго базиса, как векторы пространства V, разлагаются по базису e; пусть

$$\begin{aligned} f_1 &= c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \ldots + c_{n1}e_n, \\ f_2 &= c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + \ldots + c_{n2}e_n, \\ &\ldots \\ f_n &= c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \ldots + c_{nn}e_n. \end{aligned} \tag{17.5}$$

Коэффициенты c_{ij} этих разложений образуют матрицу

$$C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}, \tag{17.6}$$

которая называется ***матрицей перехода от базиса e к базису f***.

Обозначение: C или $C_{e \to f}$.

Замечание. Соотношения (17.5) в обозначениях (17.3) и (17.6) могут быть записаны компактно в виде

$$f = eC. \tag{17.7}$$

Теорема 17.4. *Матрица перехода к другому базису не вырождена.*

Доказательство. Пусть $|C| = 0$. Тогда (теорема 16.1, следствие) один из столбцов матрицы C является линейной комбинацией других ее столбцов. В силу свойства линейности координат отсюда следует, что один из векторов $f_1, \ldots, f_n$ линейно выражается через другие векторы этой системы. Это противоречит линейной независимости $f_1, \ldots, f_n$. ■

Теорема 17.5. *Если C – матрица перехода от базиса e к базису f, то C^{-1} – матрица перехода от базиса f к базису e.*

Доказательство. Пусть $f = eC$. Умножив обе части этого равенства на C^{-1}, получим, что $e = fC^{-1}$, откуда в силу (17.7) следует, что C^{-1} – матрица перехода от базиса f к базису e. ■

Теорема 17.6. *Координаты вектора x в базисах e и f связаны между собой соотношением*

$$x_e = Cx_f, \tag{17.8}$$

где C – матрица перехода от базиса e к базису f.

Доказательство. Из (17.4) и (17.7) имеем, что $x = ex_e$ и $x = fx_f = (eC)x_f = e(Cx_f)$. Отсюда в силу единственности разложения по базису получаем (17.8). ■

Билет 13

Ранг матрицы и линейная зависимость. *Рангом* ненулевой *матрицы* называется максимальный порядок ненулевых миноров этой матрицы. Ранг нулевой матрицы по определению считается равным нулю. Обозначение: $\operatorname{rg} A$, $\operatorname{rang} A$, r_A и др.

Из определения вытекают следующие факты:

1) ранг матрицы не превосходит ее размеров: если $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, то

$$\operatorname{rg} A \le \min(m, n); \tag{16.1}$$

2) равенство $\operatorname{rg} A = r > 0$ равносильно выполнению двух условий:

а) в матрице A существует ненулевой минор r-го порядка,

б) любой минор более высокого порядка равен нулю.

Пусть $\operatorname{rg} A = r > 0$. Любой ненулевой минор r-го порядка этой матрицы называется *базисным минором*, а строки и столбцы, в которых расположен базисный минор, – *базисными строками* и *столбцами*.

Разумеется, у матрицы может существовать не один базисный минор, но все они имеют один и тот же порядок, равный рангу этой матрицы.

Теорема 16.1 (о базисном миноре). *Базисные строки (столбцы) линейно независимы. Любая строка (столбец) является линейной комбинацией базисных строк (столбцов).*

Доказательство. Докажем столбцовый вариант теоремы. Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $\operatorname{rg} A = r > 0$. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что базисный минор M_r находится в левом верхнем углу. Тогда базисными столбцами будут первые r столбцов: $a_1, a_2, \ldots, a_r$.

Линейная независимость базисных столбцов доказывается от противного. В самом деле, пусть это не так. Тогда на основании теоремы 14.2 один из базисных столбцов является линейной комбинацией других базисных столбцов. Но тогда и в миноре M_r один из столбцов будет линейной комбинацией других столбцов и $M_r = 0$. Это противоречит тому, что M_r – базисный минор.

Пусть теперь a_k – произвольный столбец матрицы A. Покажем, что он является линейной комбинацией столбцов $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Будем считать, что $k > r$ (в случае $k \le r$ утверждение очевидно, так как $a_k = 0a_1 + \ldots + 0a_{k-1} + a_k + 0a_{k+1} + \ldots + 0a_r$). Найдем числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ такие, что $a_k = \sum_{s=1}^{r} \alpha_s a_s$ или, в поэлементной записи,

$$a_{ik} = \sum_{s=1}^{r} \alpha_s a_{is}, \quad i = \overline{1, m}. \tag{16.2}$$

Для этого составим вспомогательную матрицу

$$\Delta_i = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & a_{rk} \\ a_{i1} & \ldots & a_{ir} & a_{ik} \end{bmatrix},$$

полученную окаймлением минора M_r i-й строкой и k-м столбцом матрицы A. Очевидно, $|\Delta_i| = 0$, $i = \overline{1, m}$, так как в случае, когда $i \le r$, матрица Δ_i содержит две одинаковые строки, а в случае, когда $i > r$, $|\Delta_i|$ является минором $(r+1)$-го порядка матрицы A ранга r. Разложив $|\Delta_i|$ по последней строке, получим $0 = a_{i1}A_1 + a_{i2}A_2 + \ldots + a_{ir}A_r + a_{ik}M_r$, где $A_1, A_2, \ldots, A_r$, являясь алгебраическими дополнениями к элементам вычеркиваемой строки, не зависят от i. Отсюда, полагая $\alpha_s = -A_s/M_r$, $s = \overline{1, r}$, приходим к (16.2). ■

Следствие 1 (необходимое и достаточное условие равенства нулю определителя). Определитель матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда какая-либо ее строка (столбец) является линейной комбинацией других ее строк (столбцов).

Доказательство. Достаточность доказана в §4 (свойство 8). Необходимость вытекает из теоремы о базисном миноре, так как из равенства $|A| = 0$ следует, что $\operatorname{rg} A < n$ и, значит, в матрице A имеется хотя бы одна небазисная строка (столбец), которая является линейной комбинацией других (т.е. базисных) строк (столбцов). ■

Пусть в линейном пространстве даны две системы векторов. Если каждый вектор одной системы линейно выражается через векторы другой, то говорят, что *первая система линейно выражается через вторую*. Очевидно, что "линейная выражаемость" обладает свойством транзитивности, т.е. если система векторов $a_1, \ldots, a_k$ линейно выражается через $b_1, \ldots, b_n$, а система векторов $b_1, \ldots, b_n$ – через $c_1, \ldots, c_m$, то $a_1, \ldots, a_k$ линейно выражается через $c_1, \ldots, c_m$.

Билет 14

Теорема 16.2. *Если в линейном пространстве бо́льшая система векторов линейно выражается через меньшую, то бо́льшая система линейно зависима* [2].

Доказательство. Пусть $a_1, \dots, a_m$ и $b_1, \dots, b_n$ – две системы векторов в линейном пространстве, $m > n$ и $a_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} b_j$, $i = \overline{1, m}$. Тогда в матрице

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

число строк больше числа столбцов. Из (16.1) и условия теоремы следует, что $\operatorname{rg} A \le n < m$. Значит, в матрице C существует хотя бы одна небазисная строка (например, i-я), которая линейно выражается через другие строки. Тогда из свойств операций в пространстве $\mathbb{R}^n$ следует, что вектор a_i линейно выражается через другие векторы

системы $a_1, \dots, a_m$. Отсюда и из теоремы 14.2 следует линейная зависимость системы векторов $a_1, \dots, a_m$. ■

Теорема 16.3. *Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк (столбцов).*

Доказательство. Пусть $\operatorname{rg} A = r$ и $r > 0$ (случай $r = 0$ очевиден). Тогда в матрице A существует r линейно независимых строк (столбцов) – это ее базисные строки (столбцы). При этом любая система из большего числа строк (столбцов) линейно зависима на основании теорем 16.1, 14.2. ■

Следствие 2. $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^T$.

Замечание 1. Теорема 16.3 дает два новых определения ранга матрицы.

Теорема 16.4. *Если все строки (столбцы) матрицы A линейно выражаются через строки (столбцы) матрицы B, то*

$$\operatorname{rg} A \le \operatorname{rg} B.$$

Доказательство. Пусть $\operatorname{rg} A = r$, $\operatorname{rg} B = s$ и пусть $a_1, \dots, a_r$ и $b_1, \dots, b_s$ – базисные столбцы матриц A и B. Докажем, что $r \le s$. Пусть $r > s$, тогда согласно условию теоремы система $a_1, \dots, a_r$ линейно выражается через систему столбцов матрицы B, которая, в свою очередь, в силу теоремы 16.1 линейно выражается через систему базисных столбцов $b_1, \dots, b_s$. Отсюда следует, что $a_1, \dots, a_r$ линейно выражается через $b_1, \dots, b_s$, причем $r > s$. Из теоремы 16.2 вытекает линейная зависимость $a_1, \dots, a_r$. Это противоречит тому, что $a_1, \dots, a_r$ – базисные столбцы. ■

Билет 15

Теорема 16.5. *Ранг произведения матриц не превосходит рангов сомножителей.*

Доказательство. Пусть $C = AB$. Из (2.3), (2.2) следует, что строки матрицы C линейно выражаются через строки B, а столбцы C – через столбцы A. Отсюда в силу теоремы 16.4 вытекает, что $\operatorname{rg} C \le \operatorname{rg} B$, $\operatorname{rg} C \le \operatorname{rg} A$. ∎

Ранг матрицы и элементарные преобразования.

Теорема 16.6. *Ранг матрицы не изменяется при умножении ее на невырожденную матрицу.*

Доказательство. Пусть $C = AP$, $|P| \ne 0$. Тогда на основании теоремы 16.5 имеем $\operatorname{rg} C \le \operatorname{rg} A$. С другой стороны, матрица P обратима (теорема 5.2) и $A = CP^{-1}$. Снова воспользовавшись теоремой 16.5, получим, что $\operatorname{rg} A \le \operatorname{rg} C$. Оба этих неравенства говорят о том, что $\operatorname{rg} C = \operatorname{rg} A$. Аналогично доказывается, что $\operatorname{rg} QA = \operatorname{rg} A$, если $|Q| \ne 0$. ∎

Теорема 16.7. *Элементарные преобразования матрицы не изменяют ее ранга.*

Доказательство. Это утверждение следует из теоремы 3.2 и невырожденности матриц (3.1) элементарных преобразований ($|P_{ij}| = -1$, $|D_i| = \alpha \ne 0$, $|L_{ij}| = 1$). ∎

Теорема 16.8. *Ранг матрицы не изменится, если из системы ее строк (столбцов) вычеркнуть или приписать строку (соответственно столбец), которая является линейной комбинацией других строк (соответственно столбцов).*

Доказательство. Рассмотрим вариант теоремы, относящийся к вычеркиванию строки. Прежде чем вычеркивать строку, являющуюся линейной комбинацией других строк, вычтем из нее эту линейную комбинацию. Тогда вычеркиваемая строка станет нулевой, а ранг матрицы согласно теореме 16.7 не изменится. Затем вычеркнем нулевую строку. При этом ранг матрицы останется прежним, так как нулевая строка не влияет на порядок ее ненулевых миноров. Аналогично доказываются другие варианты теоремы. ∎

Билет 16

Эквивалентные матрицы. Две матрицы $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ называются *эквивалентными*, если существуют невырожденные матрицы P и Q такие, что $A = PBQ$. Обозначение: $A \sim B$.

Теорема 16.9. *Эквивалентность матриц является отношением эквивалентности на множестве матриц* $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Доказательство. В самом деле, рефлексивность отношения следует из того, что $A = I_{m\times m}AI_{n\times n}$, $\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}$; симметричность – из того, что если $A = PBQ$, то $B = P^{-1}AQ^{-1}$; транзитивность – из того, что если $A = P_1BQ_1$, $B = P_2CQ_2$, то $A = P_1P_2CQ_2Q_1 = PCQ$, где $P = P_1P_2$, $Q = Q_2Q_1$. ■

Теорема 16.10. *Любая ненулевая матрица* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *ранга* r *эквивалентна матрице* $I_r \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *вида*

$$I_r = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 & & & \\ 0 & 1 & \dots & 0 & & O & \\ & & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & & & \\ \hline & & & & 0 & & \\ & O & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{array}\right]$$

(здесь все элементы, кроме первых r *диагональных элементов, равных* 1*, равны* 0*)*.

Доказательство. Покажем, что матрица A элементарными преобразованиями строк и столбцов приводится к виду I_r. В самом деле, строчный вариант *основного процесса* (§3) приводит ее к верхней ступенчатой форме. Если к получившейся матрице применить столбцовый вариант основного процесса, то получим диагональную матрицу. Так как элементарные преобразования матрицы не изменяют ее ранга, то ровно r первых диагональных элементов этой матрицы отличны от нуля. Поделив каждую из первых r строк на диагональный элемент, получим матрицу I_r. На языке матриц элементарных преобразований это означает, что существуют матрицы элементарных преобразований $Q_1, \dots, Q_k$ и $P_1, \dots, P_s$ такие, что $I_r = Q_k \dots Q_1AP_1 \dots P_s$ (теорема 3.2). Положив $Q = Q_k \dots Q_1$ и $P = P_1 \dots P_s$, получим, что $I_r = QAP$, где $|Q| \neq 0$, $|P| \neq 0$ в силу невырожденности матриц элементарных преобразований. ■

Теорема 16.11. *Две матрицы* $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *эквивалентны тогда и только тогда, когда их ранги совпадают.*

Доказательство. Необходимость вытекает из определения и теоремы 16.6. Достаточность следует из теоремы 16.10 и транзитивности отношения эквивалентности. ■

Билет 17

Терминология. *Системой m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными* называется совокупность соотношений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{26.1}$$

где a_{ij}, b_i $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$ – заданные вещественные числа, а $x_1, \ldots, x_n$ – неизвестные величины. Числа a_{ij} называются *коэффициентами системы*, а b_i – *свободными членами*.

Упорядоченная совокупность чисел $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ называется *решением системы*, если при подстановке этих чисел в систему вместо неизвестных $x_1, \ldots, x_n$ соответственно каждое уравнение обращается в тождество.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если не имеет ни одного решения. Система уравнений называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если имеет более одного решения.

Исследовать и решить систему – это значит:

- установить, совместна она или несовместна;
- если она совместна, установить, является она определенной или неопределенной, при этом:

  – в случае определенной системы найти единственное ее решение;

  – в случае неопределенной системы описать множество всех ее решений.

Компактная запись системы. Коэффициенты системы образуют матрицу $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, называемую *основной матрицей системы*, свободные члены образуют столбец $b = (b_1, \ldots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$, называемый *столбцом свободных членов*, а неизвестные – столбец $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, называемый *столбцом неизвестных*. В этих обозначениях система (26.1) может быть записана в виде

$$Ax = b \tag{26.2}$$

или

$$x_1a_1 + \ldots + x_na_n = b, \tag{26.3}$$

где a_i $(i = \overline{1,n})$ – столбцы матрицы A.

В записи (26.3) система уравнений приобретает новый смысл: совместность системы равносильна тому, что столбец свободных членов является линейной комбинацией столбцов матрицы A, причем коэффициентами линейной комбинации служат компоненты $x_1, \ldots, x_n$ решения.

Эквивалентность систем. Две системы линейных алгебраических уравнений с одинаковым числом неизвестных называются *эквивалентными*, если множества всех решений этих систем совпадают.

Теорема 26.1. *Умножение обеих частей системы $Ax = b$ слева на невырожденную матрицу приводит ее к эквивалентной системе.*

Доказательство. Пусть $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ и $|Q| \neq 0$. Рассматриваемые системы имеют вид $Ax = b$ и $QAx = Qb$. Если $c \in \mathbb{R}^n$ – решение первой системы, то $Ac \equiv b$ и, следовательно, $QAc \equiv Qb$, откуда следует, что c – решение второй системы. С другой стороны, если c – решение второй системы, то $QAc \equiv Qb$. Умножив обе части этого тождества слева на Q^{-1}, получаем тождество $Ac \equiv b$, откуда следует, что c – решение первой системы. ■

Элементарные преобразования системы уравнений. *Элементарными преобразованиями системы уравнений* называются преобразования следующих типов:

1) перестановка местами двух уравнений системы;

2) умножение какого-либо уравнения системы на число $\alpha \neq 0$;

3) прибавление к одному уравнению системы другого ее уравнения, умноженного на любое число β.

Теорема 29.2. *Элементарные преобразования системы линейных алгебраических уравнений приводят ее к эквивалентной системе.*

Доказательство. Элементарные преобразования системы уравнений означают элементарные преобразования строк расширенной матрицы B, которые, как известно (§3), равносильны умножению матрицы B слева на матрицы элементарных преобразований. Это, в свою очередь, согласно трактовке (2.3) операции умножения матриц равносильно умножению слева обеих частей системы уравнений на невырожденные матрицы элементарных преобразований, что приводит к эквивалентной системе (теорема 26.1). ■

Замечание 1. Рассматриваемые в теореме преобразования относятся *только к строкам* расширенной матрицы. Очевидно, что элементарные преобразования столбцов расширенной матрицы, вообще говоря, лишены смысла. Однако можно рассматривать элементарные преобразования столбцов основной матрицы A, в частности перестановки ее столбцов, которые означают перенумерацию неизвестных системы.

Билет 18

Прежде чем рассматривать системы общего вида, исследуем простейший класс систем (26.2), когда число уравнений совпадает с числом неизвестных и $|A| \neq 0$.

Теорема 27.1. *Система линейных алгебраических уравнений с квадратной невырожденной матрицей совместна и имеет единственное решение.*

Доказательство. В силу невырожденности матрицы A для нее существует обратная матрица A^{-1}. Непосредственной проверкой легко установить, что вектор

$$x = A^{-1}b \tag{27.1}$$

является решением системы (26.2). Это решение единственно, так как если y – другое решение системы (26.2), то $Ax \equiv Ay$. Умножив обе части этого тождества слева на A^{-1}, получим, что $x = y$. ■

Правило Крамера. Решение (27.1) может быть записано покомпонентно, если воспользоваться явным выражением (5.3) для обратной матрицы. Действительно, $x = \frac{1}{|A|}\widehat{A}b$ или, в соответствии с (5.1),

$$x_i = \frac{A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + a_{ni}b_n}{|A|}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Эти соотношения в свете свойств определителя означают, что

$$x_i = |A_i|/|A|, \quad i = \overline{1,n}, \tag{27.2}$$

где A_i получается из матрицы A заменой ее i-го столбца столбцом свободных членов.

Формулы (27.2) называются *правилом Крамера.*

Замечание. Правило Крамера дает решение системы в явном виде и в некотором смысле носит алгоритмический характер. Однако правило Крамера полезно лишь в теоретических исследованиях и противопоказано для практического использования в приложениях. В самом деле, для решения систем n-го порядка по правилу Крамера требуется вычислить $(n + 1)$ определителей n-го порядка, тогда как большинство современных методов решения систем по объему вычислений равносильны вычислению одного определителя. В § 29 мы приведем описание одного из таких методов – метода Гаусса.

Билет 19

Совместность системы. Пусть теперь

$$Ax = b \tag{28.1}$$

– система общего вида и $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Исследование системы следует начать с вопроса о ее совместности. Для этой цели составим матрицу B, приписав к матрице A столбец свободных членов:

$$B = [A|b].$$

Матрица B называется *расширенной матрицей* системы (28.1).

Теорема 28.1 (теорема Кронекера–Капелли). *Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы.*

Доказательство. Необходимость. Пусть система (28.1) совместна. Тогда из (26.3) следует, что существуют числа $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ такие, что $b = x_1a_1 + \ldots + x_na_n$. Следовательно, столбец b является линейной комбинацией столбцов $a_1, \ldots, a_n$ матрицы A. Из теоремы 16.8 следует, что $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$..

Достаточность. Пусть $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = r$. Возьмем в матрице A какой-нибудь базисный минор. Так как $\operatorname{rg} B = r$, то он же будет базисным минором и матрицы B. Тогда согласно теореме 16.1 о базисном миноре последний столбец матрицы B будет линейной комбинацией базисных столбцов, т.е. столбцов матрицы A. Следовательно, столбец свободных членов системы является линейной комбинацией столбцов матрицы A. Это означает совместность системы. ■

Теорема 28.3. *Придавая свободным неизвестным произвольные значения и вычисляя значения главных неизвестных из системы (***), можно получить все решения системы (**).*

Доказательство. Пусть $(c_1, \ldots, c_r, c_{r+1}, \ldots, c_n)$ – произвольное решение системы (**). Покажем, что оно может быть получено указанным путем. Возьмем числа $c_{r+1}, \ldots, c_n$ в качестве значений для свободных неизвестных $x_{r+1}, \ldots, x_n$ и будем вычислять значения главных неизвестных, решая систему (***). Так как $(c_1, \ldots, c_r, c_{r+1}, \ldots, c_n)$ – решение системы (**), то $(c_1, \ldots, c_r)$ – решение системы (***). Но система (***) имеет единственное решение, следовательно, в качестве значений главных неизвестных мы можем получить только числа $(c_1, \ldots, c_r)$. ■

Итак, мы нашли правило, которое позволяет получить любое решение системы (**), а следовательно, и произвольной системы линейных алгебраических уравнений.

Теорема 28.4. *Система алгебраических уравнений с n неизвестными имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = n$.*

Доказательство теоремы фактически содержится в описанном выше правиле для получения решения системы. Действительно, если $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = n$, то, как указано выше, система имеет единственное решение. Если же $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B < n$, то среди неизвестных будет хотя бы одно свободное неизвестное. Придавая ему произвольные значения, получим бесконечно много решений системы. ■

Схема исследования совместной системы. Теорема Кронекера–Капелли устанавливает совместность системы. Перейдем к исследованию совместной системы. Итак, пусть система уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1+\ldots+a_{1r}x_r+a_{1,r+1}x_{r+1}+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\ a_{r1}x_1+\ldots+a_{rr}x_r+a_{r,r+1}x_{r+1}+\ldots+a_{rn}x_n=b_r,\\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mr}x_r+a_{m,r+1}x_{r+1}+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right. \qquad (*)$$

совместна и $\operatorname{rg} A=\operatorname{rg} B=r$. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что базисный минор матрицы A находится в левом верхнем углу, так что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{r1} & \ldots & a_{rr}\end{vmatrix}\neq 0. \qquad (28.2)$$

Рассмотрим укороченную систему из первых r уравнений системы $(*)$, т.е. из уравнений, коэффициенты которых входят в базисный минор:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1+\ldots+a_{1r}x_r+a_{1,r+1}x_{r+1}+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\ a_{r1}x_1+\ldots+a_{rr}x_r+a_{r,r+1}x_{r+1}+\ldots+a_{rn}x_n=b_r. \end{array}\right. \qquad (**)$$

Теорема 28.2. *Укороченная система эквивалентна исходной системе:* $(*)\sim(**)$.

Доказательство. Обе системы содержат одинаковое число неизвестных. Очевидно, что любое решение системы $(*)$ является решением системы $(**)$. Покажем, что верно и обратное. Действительно, в расширенной матрице B системы $(*)$ первые r строк являются базисными. Следовательно, все остальные строки согласно теореме о базисном миноре будут линейными комбинациями этих строк. Это означает, что каждое уравнение системы $(*)$, начиная с $(r+1)$-го, будет линейной комбинацией (т.е. следствием) первых r уравнений этой системы. Отсюда вытекает, что каждое решение первых r уравнений системы $(*)$ обращает в тождества все последующие уравнения этой системы. ■

Итак, задача исследования системы $(*)$ упрощена, теперь достаточно изучить укороченную систему $(**)$. Перейдем к этой задаче.

Если $r=n$, то система $(**)$ имеет единственное решение как система с квадратной невырожденной матрицей (§27).

Пусть $r<n$. Неизвестные $x_1,\ldots,x_r$, коэффициенты при которых входят в базисный минор, назовем ***главными***, а остальные неизвестные $x_{r+1},\ldots,x_n$ – ***свободными***.

Запишем систему $(**)$ в виде

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1+\ldots+a_{1r}x_r=b_1-a_{1,r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{1n}x_n,\\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\ a_{r1}x_1+\ldots+a_{rr}x_r=b_r-a_{r,r+1}x_{r,r+1}-\ldots-a_{rn}x_n. \end{array}\right. \qquad (28.3)$$

Придав свободным неизвестным $x_{r+1},\ldots,x_n$ произвольные значения $c_{r+1},\ldots,c_n$, получим систему уравнений относительно неизвестных $x_1,\ldots,x_r$:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1+\ldots+a_{1r}x_r=b_1-a_{1,r+1}c_{r+1}-\ldots-a_{1n}c_n,\\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\ a_{r1}x_1+\ldots+a_{rr}x_r=b_r-a_{r,r+1}c_{r,r+1}-\ldots-a_{rn}c_n \end{array}\right. \qquad (***)$$

с квадратной невырожденной (согласно (28.2)) матрицей. Эта система имеет (§27) единственное решение $c_1,\ldots,c_r$. Очевидно, что совокупность $(c_1,\ldots,c_r,c_{r+1},\ldots,c_n)$ является решением системы (**).

Теорема 28.3. *Придавая свободным неизвестным произвольные значения и вычисляя значения главных неизвестных из системы* (***) *, можно получить все решения системы* (**) .

Доказательство. Пусть $(c_1,\ldots,c_r,c_{r+1},\ldots,c_n)$ – произвольное решение системы (**) . Покажем, что оно может быть получено указанным путем. Возьмем числа $c_{r+1},\ldots,c_n$ в качестве значений для свободных неизвестных $x_{r+1},\ldots,x_n$ и будем вычислять значения главных неизвестных, решая систему (***) . Так как $(c_1,\ldots,c_r,c_{r+1},\ldots,c_n)$ – решение системы (**) , то $(c_1,\ldots,c_r)$ – решение системы (***). Но система (***) имеет единственное решение, следовательно, в качестве значений главных неизвестных мы можем получить только числа $(c_1,\ldots,c_r)$. ■

Итак, мы нашли правило, которое позволяет получить любое решение системы (**) , а следовательно, и произвольной системы линейных алгебраических уравнений.

Общее решение системы. Как указывалось в §26, решить систему – значит описать множество всех ее решений. В случае определенной системы для этого достаточно найти то единственное решение, которым она обладает. В случае же неопределенной системы необходимо найти способ, позволяющий описать бесконечное множество ее решений. Один из таких способов состоит в следующем.

Решим систему (28.3) относительно главных неизвестных:

$$\begin{array}{l} x_1=f_1(x_{r+1},\ldots,x_n),\\ \ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\\ x_r=f_r(x_{r+1},\ldots,x_n), \end{array} \qquad (28.4)$$

где $f_1,\ldots,f_r$ – некоторые однозначно (в силу теоремы 27.1) определяемые из (28.3) функции.

Соотношения (28.4) при произвольных $x_{r+1},\ldots,x_n$ описывают множество всех решений системы и называются *общим решением системы*. В отличие от общего, конкретное решение $x=(c_1,\ \ldots,\ c_n)^T$, где c_i, $i=\overline{1,n}$, – известные числа, называется *частным решением*.

Билет 21

В соответствии с общими принципами метода Гаусса решения матричных задач (§4) укажем тип простейших систем линейных уравнений, тип эквивалентных преобразований системы, а также покажем, что произвольная система линейных алгебраических уравнений указанными преобразованиями приводится к указанному типу.

Системы с трапециевидной матрицей. Пусть система

$$Ax = b \tag{29.1}$$

– система с верхней трапециевидной матрицей A. Расширенная матрица этой системы имеет вид

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2,r+1} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \dots & a_{rn} & b_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_m \end{array}\right], \tag{29.2}$$

где $a_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1, r}$.

Мы не случайно выбрали системы с верхней трапециевидной матрицей. Для таких систем чрезвычайно просто устанавливается совместность и достаточно просто находится решение.

Теорема 29.1. *Система (29.1) с верхней трапециевидной матрицей совместна тогда и только тогда, когда $b_k = 0$ при $k > r$.*

Доказательство. Действительно, ранг трапециевидной матрицы A равен числу ненулевых строк, так как минор r-го порядка, расположенный в левом верхнем углу, отличен от нуля, а все миноры более высокого порядка содержат нулевые строки и поэтому равны нулю. Ранг расширенной матрицы (29.2) равен r тогда и только тогда, когда $b_k = 0$, $k = \overline{r+1, n}$, так как наличие хотя бы одного ненулевого элемента b_i, где $r < i \leq m$, означает наличие ненулевого минора $(r+1)$-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & b_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_i \end{vmatrix}.$$

Отсюда на основании теоремы Кронекера–Капелли следует утверждение теоремы. ■

Итак, совместность системы с верхней трапециевидной матрицей устанавливается чисто "визуально".

Пусть теперь система (29.1) совместна. Реализация всех пунктов общей теории исследования и решения совместной системы (§28) для системы (29.1) также проста.

1°. В качестве базисного минора матрицы A всегда можно взять минор, расположенный в левом верхнем углу.

2°. Укороченная система состоит из первых r уравнений.

3°. Если $r = n$, то система (29.1) станет системой с треугольной матрицей

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12} + \ldots + a_{1r}x_r = b_1, \\ \qquad\quad a_{22} + \ldots + a_{2r}x_r = b_2, \\ \qquad\qquad\qquad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{rr}x_r = b_r, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение (§27); найти его не представляет труда: решая последовательно уравнения системы снизу вверх, мы каждый раз будем иметь дело с уравнением, содержащим только одно неизвестное.

4°. Если $r < n$, то неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$ будут свободными и система относительно главных неизвестных будет иметь вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r &= b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ \quad\cdots\ \cdots\ \cdots & \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \qquad\qquad a_{rr}x_r &= b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{cases} \tag{29.3}$$

Общее и частное решения исходной системы находятся из системы (29.3) с треугольной матрицей.

Приведение системы общего вида к системе с верхней трапециевидной матрицей. Как следует из теоремы 3.1 (и замечания 1 к ней), матрица A системы уравнений (28.1) общего вида элементарными преобразованиями строк и перестановками столбцов приводится к верхней трапециевидной форме (1.3). Если используемые при этом элементарные преобразования строк матрицы A применить к строкам всей расширенной матрицы B, то на основании теоремы 29.2 (и замечания к ней) мы придем к системе с верхней трапециевидной матрицей, решения которой отличаются от решений исходной системы только нумерацией неизвестных. *Метод Гаусса* исследования и решения системы уравнений состоит в приведении ее к системе с верхней трапециевидной матрицей с последующим исследованием и решением получившейся системы. При этом, если в процессе преобразования использовались перестановки столбцов основной матрицы A, то в полученных решениях необходимо восстановить исходную нумерацию неизвестных.

Процесс приведения системы к системе с трапециевидной матрицей называется *прямым ходом* метода Гаусса, а процесс решения системы с треугольной матрицей – *обратным ходом*.

По объему вычислений обратный ход оказывается несущественным в методе Гаусса, так как он требует выполнения $O(n^2)$ операций умножения, тогда как для прямого хода требуется выполнить $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$ умножений (§4). Таким образом, метод Гаусса решения системы линейных алгебраических уравнений по объему вычислений равносилен вычислению одного определителя (см. §27, замечание).

Замечание 2. В основе метода Гаусса вычисления определителя, вычисления ранга матрицы и решения системы линейных алгебраических уравнений лежит один и тот же алгоритм – основной процесс приведения матрицы к ступенчатой форме. Однако, как отмечалось в §4, 16, 29, реализация этого алгоритма для каждой из этих задач имеет свою специфику. Наиболее "свободно" он реализуется для задачи вычисления ранга матрицы, так как любые элементарные преобразования и строк, и столбцов матрицы не изменяют ее ранга. В задаче вычисления определителя по-прежнему допускаются преобразования как строк, так и столбцов, но уже необходимо следить за изменением определителя, если в преобразованиях участвовали перестановки строк (или столбцов) или умножение строки (столбца) на число $\alpha \neq 0$. Аккуратнее следует относиться к задаче решения систем уравнений, где допускаются преобразования *только строк расширенной матрицы* и *перестановки столбцов только основной матрицы*.

Билет 22

Рассмотрим свойства решений системы линейных уравнений с точки зрения теории линейного пространства.

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b \tag{30.1}$$

с матрицей $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Каждое решение этой системы можно рассматривать как вектор арифметического пространства $\mathbb{R}^n$. Совокупность всех решений системы (30.1) образует некоторое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$. Выясним, какими свойствами оно обладает.

Линейное подпространство решений однородной системы.

Теорема 30.1. *Множество всех решений однородной системы $Ax = 0$ с n неизвестными является линейным подпространством арифметического пространства $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Обозначим $L = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$. Легко проверить, что если $x \in L$, $y \in L$, то $x + y \in L$, и, кроме того, если $\alpha \in \mathbb{R}$, то $\alpha x \in L$. В силу теоремы 18.1 отсюда следует, что L – линейное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$. ■

Эта теорема позволяет "нарисовать" множество решений однородной системы, так как геометрическим образом линейного подпространства являются (§18) прямая и плоскость, проходящие через начало координат.

Произвольный базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений называется *фундаментальной системой решений*. Понятно, что фундаментальная система решений существует лишь в том случае, когда однородная система имеет нетривиальное решение. При этом система уравнений может обладать многими фундаментальными системами решений. Однако все эти системы состоят из одинакового числа векторов, равного максимальному числу линейно независимых решений однородной системы. Определим это число.

Теорема 30.2. *Размерность пространства решений однородной системы $Ax = 0$ с n неизвестными равна $n - r$, где $r = \operatorname{rg} A$.*

Доказательство. Построим фундаментальную систему решений. Для этого воспользуемся аппаратом свободных неизвестных. Пусть $x_1, \ldots, x_r$ – главные неизвестные. Придадим свободным неизвестным $x_{r+1}, \ldots, x_n$ следующие $n - r$ наборов решений: $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, \ldots, 0)$, ..., $(0, 0, \ldots, 1)$. Для каждого из этих наборов найдем соответствующие значения r главных неизвестных. Тем самым найдем $n - r$ решений системы:

$$\begin{array}{lcllllll}
e_1 & = & (c_{11}, & c_{12}, & \ldots, & c_{1r}, & 1, 0, \ldots, 0)^T, \\
e_2 & = & (c_{21}, & c_{22}, & \ldots, & c_{2r}, & 0, 1, \ldots, 0)^T, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
e_{n-r} & = & (c_{n-r,1}, & c_{n-r,2}, & \ldots, & c_{n-r,r}, & 0, 0, \ldots, 1)^T.
\end{array} \tag{30.2}$$

Решения $e_1, \ldots, e_{n-r}$ обладают следующими свойствами.

1. Решения $e_1, \ldots, e_{n-r}$ линейно независимы, так как матрица

$$C = \left[\begin{array}{cccc|cccc} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1r} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2r} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ c_{n-r,1} & c_{n-r,2} & \ldots & c_{n-r,r} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array} \right]$$

имеет ранг, равный $n-r$ (ибо содержит минор $(n-r)$-го порядка, отличный от нуля), а ранг матрицы согласно теореме 16.3 равен максимальному числу линейно независимых строк.

2. Любое решение $x = (x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n)^T$ является линейной комбинацией $e_1, \ldots, e_{n-r}$, и, более того,

$$x = x_{r+1}e_1 + \cdots + x_n e_{n-r}. \qquad (30.3)$$

Действительно, обозначим $y = x - x_{r+1}e_1 - \ldots - x_n e_{n-r}$. Пусть $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$. Очевидно, что y – решение системы. Найдем его, пользуясь общей теорией решения систем: придадим свободным неизвестным значения $y_{r+1}, \ldots, y_n$. Пользуясь соотношением (30.2), легко показать, что $y_{r+1} = \ldots = y_n = 0$. Следовательно, укороченная система будет однородной системой, имеющей единственное и, очевидно, тривиальное решение $y_1 = \ldots = y_r = 0$. Таким образом, $y = 0$. Отсюда вытекает (30.3). Из свойств 1 и 2 следует, что $e_1, \ldots, e_{n-r}$ – фундаментальная система решений. ■

Построенная фундаментальная система решений называется *нормальной фундаментальной системой решений*. Общий принцип построения фундаментальной системы решений следует из теоремы 30.2: так как размерность пространства решений однородной системы равна $n-r$, то для построения фундаментальной системы решений достаточно найти любые $n-r$ линейно независимых решений (§ 17, утверждение 1). Для этого достаточно свободным неизвестным придать $n-r$ линейно независимых наборов значений, т.е. наборов вида

$(c_{1,r+1}, \ldots, c_{1n}), \ldots, (c_{n-r,r+1}, \ldots, c_{n-r,n})$, для которых

$$\begin{vmatrix} c_{1,r+1} & \ldots & c_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-r,r+1} & \ldots & c_{n-r,n} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (30.4)$$

Если для каждого из этих наборов найти соответствующие значения главных неизвестных, то получим $n-r$ решений системы:

$$\begin{array}{lllllll} e_1 = & (c_{11}, & \ldots, & c_{1r}, & c_{1,r+1}, & \ldots, & c_{1n})^T, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e_{n-r} = & (c_{n-r,1}, & \ldots, & c_{n-r,r}, & c_{n-r,r+1}, & \ldots, & c_{n-r,n})^T, \end{array}$$

линейно независимых вследствие (30.4).

Общее решение однородной системы. Фундаментальная система решений $e_1, \ldots, e_{n-r}$ однородной системы линейных уравнений позволяет записать любое решение системы в общем виде:

$$x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_{n-r} e_{n-r}, \quad \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r} \in \mathbb{R}. \qquad (30.5)$$

Представление (30.5) решения называется *общим решением однородной системы* уравнений *через фундаментальную систему решений* (в отличие от общего решения (28.4) через свободные неизвестные).

Билет 23

Линейное многообразие решений неоднородной системы. Пусть

$$Ax = b \tag{30.6}$$

– неоднородная система линейных алгебраических уравнений. Однородная система

$$Ax = 0, \tag{30.7}$$

полученная из системы (30.6) заменой свободных членов нулями, называется *приведенной однородной* системой для системы (30.6).

Между решениями обеих систем существует тесная связь. Легко проверить следующие факты.

1°. *Сумма решений неоднородной и приведенной однородной систем является решением неоднородной системы.*

2°. *Разность двух решений неоднородной системы является решением приведенной однородной системы.*

Теорема 30.3. *Множество всех решений неоднородной системы является линейным многообразием, полученным сдвигом подпространства решений приведенной однородной системы на частное решение неоднородной системы.*

Доказательство. Пусть H – множество всех решений неоднородной системы (30.6), c – частное его решение и L – множество всех решений приведенной системы (30.7). Покажем, что $H = c + L$. Действительно, если $z \in H$, то $z = c+(z-c) = c+x$, где $x = z-c$. Так как $x \in L$ (как разность двух решений системы (30.6)), то $z \in c + L$

и, следовательно, $H \subset c + L$. С другой стороны, если $z \in c + L$, то $z = c + x$, $x \in L$. Значит, $z \in H$ как сумма решений неоднородной и приведенной систем. Следовательно, $c + L \subset H$ и $H = c + L$. ■

Общее решение неоднородной системы. Итак, найдя одно (частное) решение неоднородной системы и прибавляя его к каждому решению приведенной системы, можно получить все решения неоднородной системы. В силу (30.5) это позволяет записать решение неоднородной системы в общем виде следующим образом:

$$z = c + \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_{n-r} e_{n-r}, \quad \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r} \in \mathbb{R}, \tag{30.8}$$

где c – частное решение (30.6), а $e_1, \ldots, e_{n-r}$ – фундаментальная система решений (30.7). Представление (30.8) решения называется *общим решением неоднородной* системы уравнений *через фундаментальную систему решений*. Итак, общее решение неоднородной системы есть сумма частного решения неоднородной системы и общего решения приведенной однородной системы.

Замечание. В соответствии с теоремой 30.3 геометрическим образом множества всех решений неоднородной системы уравнений служат прямая и плоскость, не проходящие через начало координат (§18).